

Facoltà di Ingegneria
Prova scritta di Fisica II
2-maggio-2002
Compito A – Vecchio Ordinamento

Esercizio n.1

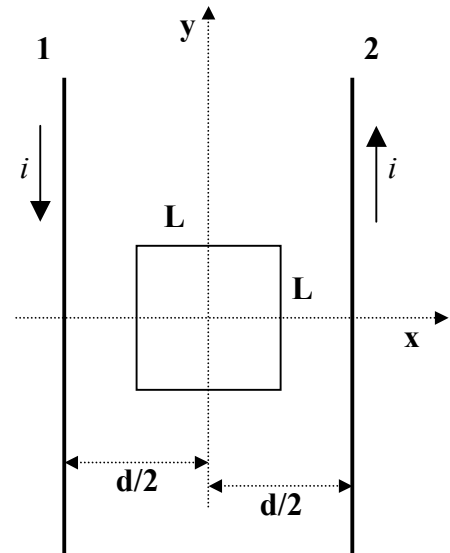
Una spira quadrata di lato L ha induttanza trascurabile ed è costituita da un filo conduttore di sezione S e conducibilità elettrica σ . La spira si trova in mezzo a due lunghi fili rettilinei posti a distanza d l'uno dall'altro e percorsi da correnti di modulo i in versi opposti (vedi figura). La spira giace nel piano xy individuato dai due fili.

Si calcoli

- la mutua induttanza tra i fili e la spira
- la corrente che scorre nella spira in funzione del tempo, supponendo che la corrente nei fili sia $i = i_o \cos \omega t$

Si risponda quindi alle seguenti domande

1. I flussi $\Phi(\vec{B}_1)$ e $\Phi(\vec{B}_2)$ dei campi dei fili 1 e 2 attraverso la spira sono
 - a. Uguali: $\Phi(\vec{B}_1) = \Phi(\vec{B}_2) \neq 0$ (*)
 - b. Opposti: $\Phi(\vec{B}_1) = -\Phi(\vec{B}_2) \neq 0$
 - c. Entrambi nulli: $\Phi(\vec{B}_1) = \Phi(\vec{B}_2) = 0$
 - d. L'uno il doppio dell'altro: $\Phi(\vec{B}_1) = 2\Phi(\vec{B}_2) = 0$
2. Il flusso del campo del filo 1 attraverso la spira quadrata vale
 - a. $\Phi(\vec{B}_1) = \frac{\mu_o i L}{2\pi} \ln \frac{2d+L}{2d-L}$
 - b. $\Phi(\vec{B}_1) = \frac{i}{2\pi \mu_o L} \ln \frac{d+L}{d-L}$
 - c. $\Phi(\vec{B}_1) = \frac{\mu_o i L}{2\pi} \ln \frac{d-L/2}{d+L/2}$
 - d. $\Phi(\vec{B}_1) = \frac{\mu_o i L}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d-L}$ (*)
3. La mutua induttanza tra i fili e la spira quadrata vale
 - a. $M = \frac{\mu_o L}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d-L}$
 - b. $M = \frac{L}{\pi \mu_o} \ln \frac{d+L}{d-L}$
 - c. $M = \frac{\mu_o L}{\pi} \ln \frac{d+L}{d-L}$ (*)
 - d. $M = \frac{\mu_o L i}{\pi} \ln \frac{d+L/2}{d-L/2}$
4. La resistenza totale della spira quadrata vale
 - a. $R = \frac{\sigma L}{A}$
 - b. $R = \frac{4\sigma L}{A}$
 - c. $R = \frac{4\sigma A}{L}$
 - d. $R = \frac{4L}{\sigma A}$ (*)
5. La corrente in funzione del tempo nella spira quadrata vale



- a. $i_{spira} = \frac{\sigma S}{4} \frac{\mu_o i_o \omega}{\pi} \ln \frac{d+L}{d-L} \sin \omega t$ (*)
- b. $i_{spira} = \frac{\sigma S}{2} \frac{\mu_o i_o \omega}{\pi} \ln \frac{d+L}{d-L} \cos \omega t$
- c. $i_{spira} = \frac{\sigma S}{4} \frac{\mu_o i_o}{\pi \omega} \ln \frac{2d+L}{2d-L} \sin \omega t$
- d. $i_{spira} = \frac{\sigma}{4 S} \frac{\mu_o i_o}{\pi \omega} \ln \frac{d+L}{d-L} \sin \omega t$

Esercizio n.2

Un filo di materiale isolante è costituito da due tratti rettilinei di lunghezza L connessi ad una circonferenza di raggio R (vedi figura).

Su ciascuno dei tratti rettilinei è uniformemente distribuita una carica Q . La circonferenza invece possiede carica con densità lineare $\lambda = k \cos \theta$.

Calcolare

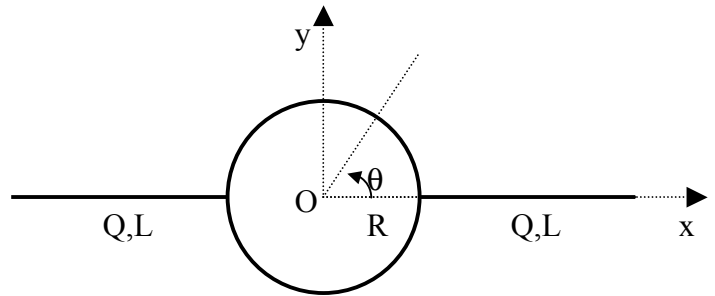
- La carica totale posseduta dal filo
- Il potenziale generato dal filo nel punto O
- Il campo elettrico generato dal filo nel punto O

Valori numerici: $Q=10^{-8}\text{C}$, $k=10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}}$, $R=20\text{cm}$, $L=50\text{cm}$,

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

Rispondere quindi alle seguenti domande:

6. La carica totale posseduta dal filo vale
 - a. $135 \mu\text{C}$
 - b. $-47 \mu\text{C}$
 - c. 0 C
 - d. $2 \cdot 10^{-2} \mu\text{C}$ (*)
7. Nel punto O, il potenziale dovuto alla carica sulla parte del filo a forma di circonferenza vale
 - a. 0 V (*)
 - b. 328 V
 - c. -240 V
 - d. -25 V
8. Nel punto O, il potenziale dovuto alla carica sull'intero filo vale:
 - a. 140.1 V
 - b. -67.3 V
 - c. 450.8 V (*)
 - d. 0 V
9. Il campo elettrico nel punto O generato dalle cariche sul filo
 - a. ha direzione e verso dell'asse x
 - b. ha direzione dell'asse x e verso opposto ad esso (*)
 - c. ha direzione e verso dell'asse y
 - d. ha direzione dell'asse y e verso opposto ad esso
10. Il campo elettrico nel punto O generato dalle cariche sul filo ha modulo
 - a. $7.8 \cdot 10^4 \text{ V/m}$
 - b. $1.4 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ (*)
 - c. $0.1 \cdot 10^4 \text{ V/m}$
 - d. $3.6 \cdot 10^3 \text{ V/m}$



Esercizio n.3

Le piastre metalliche A, D e B della figura sono parallele, hanno ciascuna area 10^{-2} m^2 e spessore trascurabile. Le distanze tra la piastra interna e le due piastre esterne (vedi figura) sono $d_1=1 \text{ mm}$ e $d_2=2 \text{ mm}$. Lo spazio tra le piastre A e D è riempito di aria (costante dielettrica relativa $\kappa=1$); quello tra D e B è riempito di teflon (costante dielettrica relativa $\kappa=2.1$).

Inizialmente le due piastre esterne (A e B) sono messe a terra e quella centrale (D) è caricata ad un potenziale di 3 kV. Calcolare la capacità equivalente del sistema delle tre piastre.

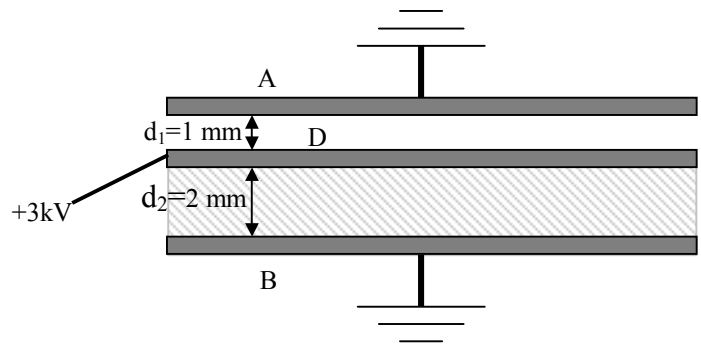
Successivamente, tutte e tre le piastre vengono isolate (collegamenti staccati) e la lastra centrale D e il teflon vengono rimossi.

Calcolare, in questa nuova configurazione:

- la carica sulle due piastre esterne (A e B)
- la differenza di potenziale tra le due piastre esterne (A e B)

Suggerimento: la carica sul condensatore formato dalle due piastre esterne è la metà della differenza

delle cariche su ciascuna di esse: $Q = \left| \frac{Q_A - Q_B}{2} \right|$.



Rispondere quindi alle seguenti domande:

11. Nella situazione iniziale, quando le piastre A e B sono collegate a terra e la piastra D è a 3 kV, il sistema delle tre piastre è equivalente a
 - a. due condensatori piani in parallelo (*)
 - b. due condensatori piani in serie
 - c. due condensatori piani né in serie né in parallelo
 - d. un solo condensatore formato dalla piastra D e dalla piastra B
12. Nella situazione iniziale, quando le piastre A e B sono collegate a terra e la piastra D è a 3 kV, la capacità del condensatore equivalente a quello formato dalle tre piastre vale:
 - a. 22 pF
 - b. 451 pF
 - c. 340 nF
 - d. 181 pF (*)
13. Dopo che le piastre A e B sono state isolate e la piastra interna è stata rimossa, la carica sulla piastra A vale
 - a. $-2.66 \cdot 10^{-1} \mu\text{C}$ (*)
 - b. $-8.31 \cdot 10^{-3} \mu\text{C}$
 - c. $1.87 \mu\text{C}$
 - d. $5.04 \cdot 10^{-1} \mu\text{C}$
14. Dopo che le piastre A e B sono state isolate e la piastra interna è stata rimossa, la carica sulla piastra B vale
 - a. $-9.22 \cdot 10^{-1} \mu\text{C}$
 - b. $-2.79 \cdot 10^{-1} \mu\text{C}$ (*)
 - c. $7.40 \mu\text{C}$
 - d. $3.81 \cdot 10^{-3} \mu\text{C}$
15. Dopo che le piastre A e B sono state isolate e la piastra interna è stata rimossa, la ddp tra le piastre A e B ha valore assoluto
 - a. 5762 V
 - b. 103 V
 - c. 208 V (*)
 - d. 1380 V

Altre domande

16. Il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze della superficie di un conduttore carico è ortogonale alla superficie
 - a. Vero (*)
 - b. Falso
17. Le linee di forza del campo elettrico sono sempre parallele alle superfici equipotenziali.

- a. Vero
- b. Falso (*)

18. La differenza di potenziale tra due punti A e B è definita come $V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$.
qualsiasi cammino

- a. Vero (*)
- b. Falso

19. Uno studente, imprigionato nella cavità interna di un conduttore, segnala la propria presenza all'esterno agitando una bacchetta isolante carica. Il campo elettrico all'esterno del conduttore varia in funzione della posizione della bacchetta, rivelando la presenza dello studente.

- a. Vero
- b. Falso (*)

20. Il campo elettrico non può cambiare il modulo della velocità di una particella carica, ma soltanto la direzione

- a. Vero
- b. Falso (*)

21. Un dipolo elettrico di momento di dipolo \vec{p} , lasciato libero in un campo elettrico uniforme, si muove con moto di traslazione parallelamente alla direzione del campo

- a. Vero
- b. Falso (*)

22. Il momento di un dipolo ha intensità $p=3$ Cm e direzione e verso del campo \vec{E} . Quando l'intensità del campo vale 2 V/m, l'energia potenziale del dipolo è maggiore di quella che si ha quando il campo vale 5 V/m (supponendo che la disposizione sia identica nei due casi).

- a. Vero (*)
- b. falso

23. A potenziale fissato, la carica di un condensatore aumenta se tra le sue armature viene inserito un dielettrico

- a. Vero (*)
- b. Falso

24. Con la convenzione $V(\infty) = 0$, il potenziale in un punto P è il lavoro fatto dal campo elettrico per portare una carica unitaria dall'infinito al punto P, lungo un cammino qualsiasi.

- a. Vero
- b. Falso (*)

25. La carica di polarizzazione di un materiale dielettrico aumenta il campo elettrostatico all'interno di esso

- a. Vero
- b. Falso (*)

26. 1 Volt (1V) è uguale ad $\frac{1Kg \cdot 1m^2}{1C \cdot 1s^2}$

- a. Vero (*)
- b. Falso

27. All'esterno di una sfera uniformemente carica, il campo elettrico è uguale a quello di una carica puntiforme posta nel centro della sfera ed avente intensità pari alla metà della carica totale della sfera.

- a. Vero
- b. Falso (*)

28. Per ottenere un condensatore con capacità di 10 nF si possono collegare in parallelo due condensatori ciascuno con capacità 20 nF.

- a. Vero
- b. Falso (*)

29. Il modulo del campo elettrico all'interno di un condensatore piano ideale è la metà del modulo del campo elettrico dovuto ad una delle due piastre.

- a. Vero
- b. Falso (*)

30. Due conduttori isolati carichi, ciascuno dei quali ha una certa capacità, vengono collegati tramite un filo conduttore. Il collegamento così realizzato è un collegamento in parallelo.

- a. Vero (*)
- b. Falso

Soluzioni

Esercizio n.1

Soluzione

La mutua induttanza tra i fili e la spira è data dal flusso del campo dei fili (\vec{B}_1 e \vec{B}_2) attraverso la spira quadrata diviso per la corrente i .

Sia \vec{B}_1 che \vec{B}_2 hanno verso uscente dal piano del foglio; i loro flussi attraverso la spira sono uguali e valgono

$$\Phi(\vec{B}_1) = \Phi(\vec{B}_2) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_o i}{2\pi(d/2 - x)} L dx = \frac{\mu_o i L}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d-L}$$

$$M = \frac{\Phi(\vec{B}_1) + \Phi(\vec{B}_2)}{i} = \frac{2 \mu_o i L}{i 2\pi} \ln \frac{d+L}{d-L} = \frac{\mu_o L}{\pi} \ln \frac{d+L}{d-L}$$

Ad un generico istante t , il flusso concatenato alla spira è

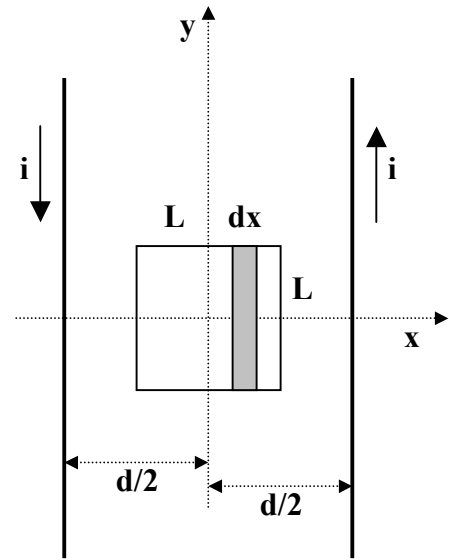
$$\Phi(\vec{B}_1) = \Phi(\vec{B}_2) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_o i_o}{2\pi(d/2 - x)} \cos(\omega t) L dx = \frac{\mu_o i_o L}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d-L} \cos \omega t$$

La f.e.m. indotta nella spira risulta

$$f.e.m. = - \frac{d\Phi(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)}{dt} = \frac{\mu_o i_o L \omega}{\pi} \ln \frac{d+L}{d-L} \sin \omega t$$

e la corrente nella spira è di conseguenza

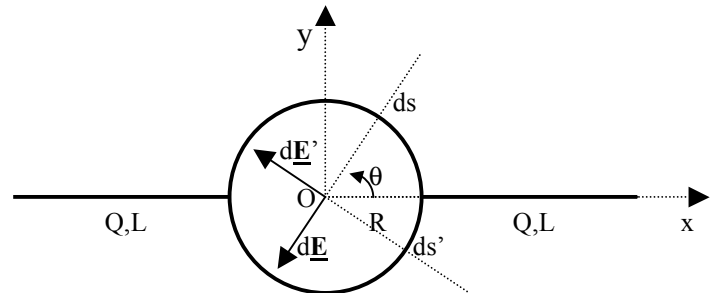
$$i_{spira} = \frac{f.e.m.}{R} = \frac{\sigma S}{4L} \frac{\mu_o i_o L \omega}{\pi} \ln \frac{d+L}{d-L} \sin \omega t = \frac{\sigma S}{4} \frac{\mu_o i_o \omega}{\pi} \ln \frac{d+L}{d-L} \sin \omega t$$



Esercizio n.2

La carica totale sulla circonferenza è nulla, infatti

$$Q_{circ} = \int_0^{2\pi R} \lambda ds = \int_0^{2\pi} \lambda R d\theta = Rk \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = Rk \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$



Quindi la carica totale posseduta dal filo vale $2Q = 2 \cdot 10^{-8} \text{C}$.

Il potenziale nel punto O può essere calcolato come la somma del potenziale dovuto alla carica dei due fili rettilinei più quello della carica sulla circonferenza:

$$V(P) = V_{filo} + V_{filo} + V_{circ} = 2 \int_R^{R+L} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda_{filo} dx}{x} + \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda_{circ} ds}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \frac{Q}{L} \ln \frac{R+L}{R} + \frac{k}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_o} \frac{Q}{L} \ln \frac{R+L}{R} + \frac{k}{4\pi\epsilon_o} \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \frac{Q}{L} \ln \frac{R+L}{R} = 450.81 \text{V}$$

Nel punto O, i campi delle cariche dei due fili rettilinei sono vettori uguali in modulo e in direzione ed opposti in verso, quindi i due fili rettilinei non contribuiscono al campo.

Nel primo e nel quarto quadrante il filo è carico positivamente; nel secondo e nel terzo quadrante invece la carica è negativa. Considerando ad esempio il campo dovuto alla carica su di un elemento infinitesimo di filo nel primo quadrante ed il campo della carica sull'elemento infinitesimo ad esso simmetrico (rispetto all'asse x) nel quarto quadrante, è facile vedere che il campo elettrico nel punto O è diretto come l'asse x ed ha verso opposto ad esso. Il suo modulo è:

$$E_x(P) = E_{x,filo} + E_{x,filo} + E_{x,circ} = \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_{circ} ds \cos \theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{k}{R} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{k}{R} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{k}{4\epsilon_0 R} = 1,41 \cdot 10^4 \frac{V}{m}$$

Esercizio n.3

Nella situazione iniziale, il sistema delle tre piastre è equivalente a due condensatori piani in parallelo, l'uno formato dalle piastre A e D e l'altro dalle piastre B e D. La capacità equivalente è quindi:

$$C_{eq} = C_{AD} + C_{BD} = \frac{\epsilon_0 A}{d_1} + \frac{\epsilon_0 \kappa A}{d_2} = 88.5 pF + 92.925 pF = 181.425 pF$$

La carica su questi due condensatori vale:

$$Q_{AD} = C_{AD} V = 2.665 \cdot 10^{-7} C \quad \text{e} \quad Q_{BD} = C_{BD} V = 2.7877 \cdot 10^{-7} C$$

Essendo a potenziale più alto, la piastra centrale possiede carica positiva e le piastre esterne posseggono cariche negative.

Poiché nel processo di scollegamento e di rimozione della piastra D, la carica delle piastre A e B non cambia, nella situazione finale risulta

$$Q_A = -2.66 \cdot 10^{-7} C \quad \text{e} \quad Q_B = -2.79 \cdot 10^{-7} C$$

Seguendo il suggerimento, la carica sul condensatore costituito dalle sole piastre A e B è

$$Q = \left| \frac{Q_A - Q_B}{2} \right| = 0.06135 \cdot 10^{-7} C$$

e quindi il valore assoluto della ddp V_{fin} tra A e B è

$$V_{fin} = \frac{Q}{C_{fin}} = \frac{Q(d_1 + d_2)}{\epsilon_0 A} = 207.97 V$$